Universidad de Jaén
Departamento de Matemáticas
(Área de Álgebra)

Listas. Matrices y vectores en Mathematica

Mathematica no solo es un paquete de cálculo simbólico en el que se introduce un problema y se obtiene un resultado, sino que también incorpora un lenguaje de programación, que nos permite implementar algoritmos numéricos, algebraicos o gráficos. En programas escritos en este lenguaje podemos utilizar todos los comandos de Mathematica, lo cual supone un gran enriquecimiento de tal lenguaje.

1. LISTAS

Llamaremos lista a un conjunto finito $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ de elementos que no han de ser necesariamente del mismo tipo. De esta forma podemos formar una lista en la que aparezcan números, funciones, constantes, gráficos, otras listas, etc.

Para representarlas en Mathematica, se deben indicar sus elementos entre llaves y separados por comas. Las podemos nombrar como a cualquier variable, utilizando letras (preferentemente minúsculas y sin espacios) o también letras y números pero siempre que estos no aparezcan a la izquierda.

Con las listas se pueden efectuar operaciones aritméticas básicas o ser utilizadas como argumento de las funciones elementales, entendiéndolas elemento a elemento.

Ejemplo 1.6. Consideremos la lista $l = \{2, x, \pi/2, 3 + i\}$. Vemos que en este caso tenemos una lista formada por un número entero, una constante simbólica, un número irracional y un número complejo.

A partir de la definición de una lista, podemos calcular con ella cualquier operación, como si se tratara de otra variable, efectuando dicha operación en cada elemento de la misma. En Mathematica podemos escribir:

In[]:= **l={2, x, Pi/2, 3+I};**

In[]:= **h=2*l**

Out[]= `{4,2x,π,6+2ⅈ}`

In[]:= **Sin[h]//N**

Out[]= `{-0.756802,Sin[2.x],0.,-1.05122+3.4824ⅈ}`

■

En la siguiente tabla podemos ver las funciones más habituales que podemos emplear para manejar listas:

Funciones para usar listas	
lista[[i]]	El *i*-ésimo elemento de “lista”
First[lista]	Primer elemento de “lista”
Last[lista]	Último elemento de “lista”
Length[lista]	Longitud de “lista”
Join[lista1,lista2,...]	Devuelve una nueva lista resultado de unir “lista1”, “lista2” ...
Insert[lista,elemento,n]	Devuelve una nueva lista resultado de añadir “elemento” en la posición “n” de “lista”
Delete[lista,n]	Devuelve una nueva lista resultado de eliminar el elemento de la posición “n” de “lista”

2. VECTORES Y MATRICES

Nos interesa saber cómo se declara una variable como matriz o vector, y además veremos cómo introducir la información en las mismas, consultarla y mostrarla en pantalla.

Es claro que los vectores que todos conocemos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ pueden considerarse como un caso particular de tablas de una sola fila en las que todos los datos son valores reales. Así una lista puede considerarse un vector en un espacio de dimensión igual al número de datos que contiene.

Ejemplo 1.7. Para trabajar con el vector (–1, 2, 0) de $\mathbb{R}^3$ introduciremos

In[]:= **u={-1,2,0};**

asigna a “u” una lista de elementos –1 , 2, 0, que puede interpretarse como el vector (–1, 2, 0) de $\mathbb{R}^3$.

■

Los elementos de una lista pueden ser a su vez, otras listas. En concreto, si una lista está formada por un conjunto de listas de la misma longitud, ésta puede ser considerada una matriz de dimensión $m \times n$, siendo m el número de listas que lo componen y n la longitud de las mismas.

Ejemplo 1.8. La matriz $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ podremos introducirla listando sus filas de la forma

In[]:= **b={{1,2,3},{2,-3,0}};**

■

Si se desea, lo anterior puede ser presentado en forma matricial mediante la orden:

MatrixForm[lista]

Ejemplo 1.9. El vector *u* y la matriz *b* podemos ponerlos en forma matricial y ahora aparecen los paréntesis tal y como los escribimos habitualmente

In[]:= **MatrixForm[u]**
MatrixForm[b]

Out[]= $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Nótese que MatrixForm[] devuelve una representación gráfica de una lista por lo que no podemos utilizarla para operar con ella.

In[]:= **M=MatrixForm[u];**
M[[3]]

`Part ::partw : Part 3 of` $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$`[[3]] not exist . More…`

Out[]= $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$`[[3]]`

■

La orden

Dimensions[nombre]

genera una lista formada por un único número, si “nombre” representa un vector, igual a su longitud, o por dos números, si “nombre” es una matriz, igual al número de filas y el número de columnas, respectivamente.

Ejemplo 1.10. Calculamos el número de coordenadas del vector *u* y el orden de la matriz *b* del ejemplo anterior:

In[]:= **Dimensions[u]**
Dimensions[b]

Out[]= `{3}`
`{2,3}`

■

Si se desea seleccionar una fila de una matriz *b*, bastará con escribir el nombre de la misma y, entre dobles corchetes, la posición que ocupa dicha fila. Así la *i*-ésima fila de *b* se selecciona mediante **b[[i]]**, y el elemento que ocupa la posición (*i*, *j*) de la matriz *b* mediante **b[[i,j]]**. Observemos que los vectores pueden ser considerados en Mathematica como matrices de una sola fila, por lo que para calcular la *i*-ésima coordenada del vector *u*, ponemos **u[[i]]**.

Las órdenes

m=Dimensions[b][[1]] y **n=Dimensions[b][[2]]**

asignan a *m* y *n* el número de filas, 2 y el de columnas, 3 de la lista *b*, pues Dimensions[*b*] se trata de una lista con estos dos valores.

De todo lo anterior deducimos que la descripción en Mathematica de vectores y matrices podremos hacerla de dos formas:

1. Listando sus coordenadas si son vectores o sus filas, si son matrices.
2. A través de la función Table:

   2.1.Para definir vectores *n*-dimensionales utilizaremos

   vector=Table[valor_por_defecto, {j,n}]

   2.2. Para definir tablas o matrices n_1 x n_2

   matriz=Table[valor_por_defecto, {j_1,n_1}, {j_2,n_2}]

Ejemplo 1.11. Definiremos de las dos formas anteriores el vector (*A*, *B*, *C*, *D*). En primer lugar listamos sus coordenadas:

In[]:= **vector={A,B,C,D}**

Out[]= `{A,B,C,D}`

También definimos un vector 4-dimensional, y asignamos a cada coordenada una letra.

In[]:= **vector=Table[0,{i,4}];**
vector[[1]]=A;
vector[[2]]=B;
vector[[3]]=C;
vector[[4]]=D;
vector

Out[]= `{A,B,C,D}`

■

Ejemplo 1.12. Ahora definimos una matriz 3 × 3 que contiene 0 en todas sus coordenadas.

In[]:= **matriz=Table[0,{i,3},{j,3}]**

Out[]= `{{0,0,0},{0,0,0},{0,0,0}}`

Mathematica la muestra como una lista de vectores, si queremos que aparezca como una matriz, escribimos:

In[]:= **MatrixForm[matriz]**

Out[]= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

■

Las siguientes funciones permiten construir algunos tipos especiales de matrices:

a) **DiagonalMatrix[{x,y,z,...}]**, genera la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son sus argumentos.

b) **IdentityMatrix[n]**, representa a la matriz identidad de orden n.

Ejemplo 1.13. Ahora definimos una matriz diagonal 3 × 3 que en su diagonal tiene a los elementos 1, –2 y 3

In[]:= **Diagonalmatrix[{1,-2,3}]**

Out[]= `{{1,0,0},{0,-2,0},{0,0,3}}`

Si queremos que nos devuelva la matriz identidad de dimensión 4, escribimos:

In[]:= **IdentityMatrix[4]**

Out[]= `{{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}}`

■

3. OPERACIONES CON MATRICES

La suma y el producto de matrices con las correspondientes condiciones sobre sus dimensiones, se expresan mediante los operadores "+" y "." respectivamente.

Ejemplo 1.14. Consideremos las siguientes matrices

In[]:= **a=Table[1/(i+j),{i,5},{j,5}];**
b={{2,3,4,5,6},{3,4,5,6,7},{4,5,6,7,8},{5,6,7,8,9},{6,7,8,9,10}};
MatrixForm[a]
MatrixForm[b]

Out[]=
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Algunos ejemplos de operaciones son:

In[]:= **a + b;**
MatrixForm[%]

Out[]=
$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} \\ \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} \\ \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} \\ \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} & \frac{82}{9} \\ \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} & \frac{82}{9} & \frac{101}{10} \end{pmatrix}$$

In[]:= **a b**
a*b

Out[]= {{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1}}

{{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1},{1,1,1,1,1}}

In[]:= **a.b//MatrixForm**

Out[]=

$$\begin{pmatrix} 5 & \frac{129}{20} & \frac{79}{10} & \frac{187}{20} & \frac{54}{5} \\ \frac{547}{140} & 5 & \frac{853}{140} & \frac{503}{70} & \frac{1159}{140} \\ \frac{1357}{420} & \frac{3457}{840} & 5 & \frac{4943}{840} & \frac{2843}{420} \\ \frac{2321}{840} & \frac{4421}{1260} & \frac{10721}{2520} & 5 & \frac{14479}{2520} \\ \frac{1523}{630} & \frac{2573}{840} & \frac{4673}{1260} & \frac{10973}{2520} & 5 \end{pmatrix}$$

Las potencias de una matriz las calcularemos a través de la función **MatrixPower[matriz, n]**, quien realiza la potencia n-ésima de la matriz "matriz".

In[]:= **M = {{2,3,4},{3,4,5},{4,5,6}};**
MatrixPower[M, 4]

Out[]= {{4493, 5916, 7338}, {5916, 7788, 9660},{7338, 9660, 11982}}

sin embargo de la forma siguiente no calculamos las potencias

In[]:= **M^4**

Out[]= {{16, 81, 256}, {81, 256, 625}, {256, 625, 1296}}

El producto de un escalar por un vector o una matriz se expresa mediante el operador "*" o un espacio:

In[]:= **0 a**

Out[]:= {{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0}}

In[]:= **0*a**

Out[]:= {{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0},{0,0,0,0,0}}

■

La transpuesta de una matriz la calculamos a partir de la función **Transpose[matriz]** quien nos devuelve la transpuesta de "matriz".

El determinante de una matriz cuadrada se calcula mediante la función **Det[matriz]**. Por último, para las matrices cuadradas regulares, es decir, aquellas con determinante distinto de cero, su inversa podemos calcularla mediante la orden **Inverse[matriz]** quien nos devuelve la inversa de "matriz".

Ejemplo 1.15. Calculemos la transpuesta de la siguiente matriz y en caso de ser regular su inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

In[]:= **A={{1,0},{3,2}};**
Transpose[A]

Out[]:= `{{1, 3}, {0, 2}}`

Veamos si es regular calculando su determinante

In[]:= **Det[A]**

Out[]:= `2`

Como es distinto de cero, podemos calcular su inversa:

In[]:= **Inverse[A]**

Out[]:= $\{\{1,0\},\{-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\}\}$

En efecto:

In[]:= **A.Inverse[A] ==IdentityMatrix[2]**

Inverse[A].A==IdentityMatrix[2]

Out[]:= `True`

`True`

■